jan. 19

(12×3 p.) **I. A minimumkövetelményből.**

1. Mit jelent, hogy egy $f : A \to B$ függvény szürjektív?

$\forall b \in B \ \exists a \in A$, hogy $f(a) = b$

2. Mit jelent, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz korlátos?

$\exists R > 0$, hogy $\forall a \in A$-ra $|a| \leq R$

3. Mit jelent, hogy egy $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja?

$\forall r > 0$ esetén $A \cap (a-r, a+r)$ végtelen sok pontot tartalmaz

4. Írja le a Bernoulli-egyenlőtlenséget.

$a_i > -1$ azonos előjelű $\Rightarrow \prod_1^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_1^n a_i$

5. Mit jelent, hogy egy sor Leibniz-sor?

$\sum (-1)^{n-1} a_n$ Leibniz-sor, ha $a_n > 0$ monoton csökkenően tart 0-hoz

6. Írja le a sorokra vonatkozó kondenzációs kritériumot.

Ha $a_n \geq 0$ monoton csökkenő, akkor

$\sum a_n$ konvergens $\Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ konvergens

7. Írja le a lokális szélsőérték differenciális jellemzését.

a) a-ban lok. szélsőérték van és f diffható a-ban $\Rightarrow f'(a) = 0$

b) f kétszer diffható a-ban, $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0 \ (< 0) \Rightarrow a$-ban lok. min. (lok. max) van

8. Írja le a helyettesítéses integrálás tételét.

g diffható, g' integrálható $[a, b]$-n, f folytonos g értékkészletén. Akkor

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

9. Írja le a Newton–Leibniz-tételt.

f integrálható $[a, b]$-n, $F \in C[a, b]$ differenciálható (a, b)-n és $F' = f$ (a, b)-n

$$\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

10. Írja le a függvények kompozíciójának a deriválásáról szóló tételt.

f diffható a-ban, g diffható $f(a)$-ban $\Rightarrow g \circ f$ diffható a-ban

és $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

11. Mit jelent, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nulla mértékű?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_n$ intervallumok, hogy $\sum_1^\infty |I_n| < \varepsilon$ és $\bigcup_1^\infty I_n \supset A$

12. Mit jelent, hogy egy $A \in \mathbb{R}$ szám az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény felső integrálja?

$A = \inf \{ S_\phi f \mid \phi$ felosztás $[a, b]$-n$\}$, ahol

$$S_\phi f = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

II. Igaz vagy Hamis? Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be annak megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis. *(15×3 p.)*

1. I H Ha $a \in A$, akkor $\{a\} \in A$ vagy $a \subseteq A$ teljesül.
2. I H Ha $a \in \mathbb{R}$ az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, akkor $a \in X$.
3. I H Ha $a \in \mathbb{R}$ az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz belső pontja, akkor $a \in X$.
4. I H Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozatra $\lim_{n!\ 1} a_n = 0$ teljesül, akkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor konvergens.
5. I H Két divergens sorozat szorzata divergens.
6. I H Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ sorozatra $\lim_{n!\ 1} a_n = 1$ teljesül, akkor $\lim_{n!\ 1} a_n^n = 1$ is teljesül.
7. I H Ha az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nulla mértékű, akkor korlátos.
8. I H Ha a $\sum_n a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_n \frac{a_n}{n+1}$ sor is konvergens.
9. I H $\forall x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
10. I H Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, akkor folytonos.
11. I H $\forall q \in \mathbb{R} :\ \int_1^1 \frac{1}{x^q}\, \mathrm{d}x < \infty \iff q > 1.$
12. I H Ha az $a \in \mathbb{R}$ pontra és az $X \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazra $a \notin X$ teljesül, akkor a belső pontja az $\mathbb{R} \setminus X$ halmaznak.
13. I H Minden $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény differenciálható a $]0, 1[$ halmazon.
14. I H Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény, akkor kétszer differenciálható és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \geq 0$.
15. I H Az $\mathbb{R}$ halmaz előállítható korlátos halmazok uniójaként.

(*10 p.*) **III. Bizonyítás.** Igazolja, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos nem üres halmaz, akkor $-A = \{-x \in \mathbb{R} | \ x \in A\}$ halmaz alulról korlátos, és $\inf(-A) = -\sup A$.

c felső korlátja A-nak $\Leftrightarrow \forall a \in A \ a < c \Leftrightarrow \forall a \in A \ -a > -c$
$\Leftrightarrow -c$ alsó korlátja A-nak.

Ezért
$c = \sup A \Leftrightarrow c$ a legkisebb felső korlátja A-nak
$\Leftrightarrow -c$ a legnagyobb alsó korlátja A-nak $\Leftrightarrow -c = \inf(-A)$

Azaz $-\sup A = \inf(-A)$ $\square$

IV. Ellenpélda. *(3×3 p.)*

1. Adjon példát nem monoton $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektív függvényre.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. Adjon példát olyan konvergens sorozatra, amely előáll két divergens sorozat összegeként. (A két divergens sorozatot is adja meg.)

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, $a_n + b_n = 0$

3. Adjon példát olyan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvényre, melyre $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ teljesül.

(4×4 p.) **I. Határozatlan integrál.** Adja meg az alábbi integrálokat.

1. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{(2x+2)+1}{(x+1)^2+9}\,dx = \ln(x^2+2x+10) +$

$+ \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2} = \ln(x^2+2x+10) + \frac{1}{9}\cdot 3\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$

2. $I = \int \cos(2x)\sin(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) + C$

Másképpen: $I = \frac{\sin 2x}{2}\sin 3x - \frac{3}{2}\int \sin 2x \cos 3x\,dx = \frac{\sin 2x \sin 3x}{2} +$

$+ \frac{3}{4}\cos 2x \cos 3x + \frac{9}{4}\underbrace{\int \cos 2x \sin 3x\,dx}_{I}$, $I\left(1-\frac{9}{4}\right) = \frac{\sin 2x \sin 3x}{2} +$

$+ \frac{3}{4}\cos 2x \cos 3x \Rightarrow I = -\frac{2}{5}\sin 2x \sin 3x - \frac{3}{5}\cos 2x \cos 3x$

3. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+2e^{2x}+5}\,dx$ (Útmutatás: célszerű a $t = e^x$ helyettesítés.) $\overset{t=e^x,\ dt=e^x dx}{=}$

$= \int \frac{t}{t^4+2t^2+5}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2+4}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{2t}{1+\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+C =$

$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)+2$. Másképpen: $t=e^{2x}$, $dt = 2e^{2x}dx$, $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2t+5} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{8}\cdot 2\cdot \operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}+1}{2} + C$

4. $\int 1\cdot\operatorname{arctg}(2x)\,dx = x\operatorname{arctg} 2x - \int x \frac{2}{1+4x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} 2x -$

$- \frac{1}{4}\int \frac{8x}{1+4x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C$

II. Határozott integrál. Az alábbi (I_1, I_2, I_3) számok értéke egy-egy pozitív egész szám. Mik ezek a számok konkrétan? *(3×5 p.)*

1. $I_1 = 9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(3x)\,\mathrm{d}\,x = 9\int_{\pi/2}^{\pi} \cos 3x\cdot(1-\sin^2 3x)\,dx =$

$= 9\left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin^3 3x}{9}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 9\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right) = 2.$

2. $I_2 = 4\int_0^{\ln 2} 2 - x\overbrace{(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)}^{e^x}\,\mathrm{d}\,x = 8\ln 2 - 4\int_0^{\ln 2} xe^x dx = 8\ln 2 -$

$-\underbrace{4\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}}_{2\ln 2} + 4\int_0^{\ln 2} e^x dx = 8\ln 2 - 8\ln 2 + 4\left[e^x\right]_0^{\ln 2} = 4(2-1) = 4.$

3. $I_3 = \frac{12}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{12}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{12}{\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}}_{0} =$

$= 6$

(2× 5 p.) **III. Határozott integrál alkalmazásai.**

1. Mutassa meg, hogy az $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú kör kerülete $2R\pi$. (Útmutatás: az R sugarú félkör grafikonjának az ívhossza integrálással számolható.)

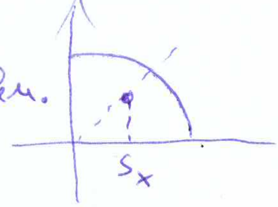
$$S = \int_a^b \sqrt{1+f'^2} \underset{\uparrow}{=} \int_{-R}^{R} \sqrt{1+\frac{r^2}{R^2-r^2}}\,dr = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}\,dr = R\left[\mathrm{arctg}\,\frac{r}{R}\right]_{r=-R}^{R} =$$

$f=\sqrt{R^2-r^2}$, $f' = \frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$= R\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = R\pi$. Másképpen: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$,

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt = \int_0^{\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} R\,dt = R\pi.$$

2. Az egységnyi sugarú negyedkörnek milyen messze van a súlypontja a kör középpontjától?



a) A körvonal súlypontja: a negyedkörvonalat megforgatva az x tengely körül félgömbfelület kap. A Papposz-Guldin tétel szerint

$$2\pi = F = L\cdot 2\pi s_x = \frac{\pi}{2}\cdot 2\pi s_x$$

Ezért $s_x = \frac{2}{\pi}$, az origótól vett távolság $\sqrt{2}\,s_x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Másképpen $$s_x = \frac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}{\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

$x = \cos t$, $y = \sin t$

b) A körlap súlypontja: a negyedkörlapot megforgatva az x tengely körül félgömböt kapunk. A Papposz-Guldin tétel szerint

$$\frac{2}{3}\pi = V = F\cdot 2\pi s_x = \frac{\pi}{4}\cdot 2\pi s_x = \frac{\pi^2}{2} s_x$$

Ezért $s_x = \frac{4}{3\pi}$, a távolság az origótól $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$

Másképpen $$s_x = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{1} =$$

$= \cancel{\frac{4\pi}{3}} = \frac{4}{3\pi}$.

Az a) és a b) értelmezést is elfogadtuk.

IV. Improprius integrál. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e, és ha igen, számolja ki értéküket. *(3×3 p.)*

1. $L_1 = \int_1^{\infty} \frac{x^3+19x+1}{x^4+2x^3+7}\,\mathrm{d}\,x$ $= \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1+\frac{19}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^4}}\,dx$ divergens, mert

$f(x) \geq \frac{1}{x} \frac{1}{1+2+7}$ és $\int_1^{\infty} \frac{dx}{10x} = \infty$

2. $L_2 = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,\mathrm{d}\,x$ $= \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$

$= \left[\arcsin(x-3)\right]_{x=2+0}^{4-0} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

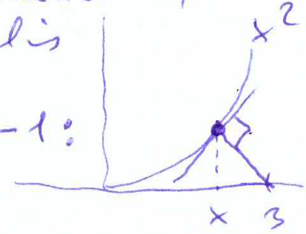
3. $L_3 = \int_2^4 \frac{1}{((4-x)(x-2))^{3/2}}\,\mathrm{d}\,x$ divergens, mert pl a $[2,3]$ halmazon

$\frac{1}{((4-x)(x-2))^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{1}{2^{3/2}(x-2)^{\frac{3}{2}}}$ és $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{3/2}} = \left[-2(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{2+0}^{3} = \infty.$

(5× 10 p.) **V. Vegyes feladatok.**

1. Mi a legkisebb távolság a $(3,0)$ pont és az $((x,x^2)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R})$ parabola pontjai között?

A távolság négyzete $f(x)=(x-3)^2+x^4$, $f'=2(x-3)+4x^3$, $f'(1)=0$
$f''=12x^2+2>0 \Rightarrow f'<0$, ha $x<1$ és >0, ha $x>1 \Rightarrow x=1$ a minimum,
$d=\|(3,0)-(1,1)\|=\sqrt{5}$. Másképpen: az optimális x-ben a $(3,0)$-ból (x,x^2)-be vezető szakasz $\perp$ a parabola érintőjére, ezért a meredekségek szorzata -1:
$2x\cdot\frac{x^2}{x-3}=-1$, $f(x)=2x^3+x-3=0$. Erre $f(1)=0$,
$f'=6x^2+1>0$, tehát f-nek egyetlen gyöke $x=1 \Rightarrow d=\|(3,0)-(1,1)\|=\sqrt{5}$.



2. Számolja ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$ határértéket.

$$=\lim\frac{n\sqrt{4+\frac{3}{n}}}{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}=\frac{\sqrt{4+0}}{\sqrt{1+0}}=2.$$

3. Igazolja, hogy ha az $f,g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\sqrt{x}$ és $g(x)=-x^2$ függvényhez bármely $x_0\in\mathbb{R}^+$ pontban érintőt húzunk, akkor az érintők derékszögben metszik egymást.

Az érintők meredekségei a deriváltak. Az érintők $\perp$-ek $\Longleftrightarrow$ a deriváltak szorzata -1.

$$f'(x_0)\cdot g'(x_0)=\frac{1}{2x_0}\cdot(-2x_0)=-1.$$

4. Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$ határértéket. $= \lim\limits_{0+0} e^{\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\operatorname{sh} x}} = (*)$

Mivel $\lim\limits_{0+0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\operatorname{sh} x} \underset{\frac{0}{0},\, \text{l'H}}{=} \lim\limits_{0+0} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}}{\operatorname{ch} x} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1,$

ezért $(*) = e^1 = e.$

5. Milyen $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén lesz konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n(n^2+2)}$ sor?

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{3} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+2}} \to \frac{|x|}{3}$, mert $\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} < \sqrt[n]{n^2+2} < \sqrt[n]{3n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{3}\cdot(\sqrt[n]{n})^2}_{\to 1}$

miatt $\sqrt[n]{n^2+2} \to 1$. A gyökkritérium szerint $\frac{|x|}{3} < 1$-re a sor konvergens, $\frac{|x|}{3} > 1$-re divergens. Ha $x = 3$, akkor

$\sum \frac{n}{n^2+2}$ divergens, mert $\sum \frac{n}{n^2+2} > \sum \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3}\sum\frac{1}{n} = \infty$; ezért

$x = 3$-ban nincs konvergencia. Az $x = -3$-ban a sor

$\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$ Leibniz típusú $\Rightarrow$ konvergens. A monoton

csökkenés: $\frac{n}{n^2+2} > \frac{n+1}{(n+1)^2+2}$, $n(n^2+2n+3) > \underbrace{(n+1)(n^2+2)}_{n^3+n^2+2n+2}$

$n^2+n > 2$ ✓, $\frac{n}{n^2+2} \to 0$ világos. Ezért $x = -3$-ban a sor

konvergens, $KT = [-3, 3)$.